## 培优课03 函数性质的综合应用

### 培优点一 函数的单调性与奇偶性结合

#### 审题指导

典例1 （审题①根据偶函数的性质推出当时,函数的单调性），则不等式（审题②将偶函数比大小问题转化为绝对值比大小问题）的解集为.

**解题观摩**

[解析]因为是偶函数，且当时，是增函数，，…………审题①

，…………审题②

解得，故原不等式的解集为.

#### 通性通法

**1.比较大小问题**

一般解法是利用奇偶性，把不在同一个单调区间上的两个或两个以上自变量的函数值转化为在同一单调区间上的有关自变量的函数值，然后利用单调性比较大小.

**2.解抽象函数不等式**

（1）将所给的不等式转化为两个函数值的大小关系；

（2）利用单调性脱去符号“”，转化为解不等式（组）的问题.

#### 培优训练

##### 变更奇偶性条件变式

1. 若将典例1中的条件“偶函数”改为“奇函数”，则不等式的解集为.

[解析]因为是奇函数，且当时，是增函数，所以在上单调递增.又，所以，则，即，解得,故原不等式的解集为.

##### 比较大小问题设问变式

2. 设是上的偶函数，且在上单调递增，则,,的大小关系是.

[解析]因为是上的偶函数，所以,.又在上单调递增，且 ,所以，即.

##### 解不等式问题设问变式

3. 已知是奇函数，且在上是增函数,，求的解集.

[解析]由题意知在上是增函数且，所以当时，，当时，，又因为是奇函数，所以当时，，，所以，

当时，，，

所以，

所以,,的符号随的变化情况如表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | - | - |  |  |
|  | - |  | - |  |
|  |  | - | - |  |

由表可知，不等式的解集为.

### 培优点二 函数的奇偶性与周期性结合

#### 审题指导

典例2 （审题①当时,由可得出的表达式审题②当时,由函数的周期性和奇偶性可得出），则当时，的解析式为.

**解题观摩**

[解析]当时，，

；…………审题①

当时，，，因为函数为偶函数，

………….审题②

综上所述，当时，.

#### 通性通法

已知函数的奇偶性、周期性求函数值或函数解析式，常利用奇偶性及周期性进行变换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内，把未知区间上的函数性质转化为已知区间上的函数性质求解.

#### 培优训练

##### 由为偶函数推出周期条件变式

1. （多选题）已知函数的定义域为，若与都是偶函数，则( CD ).

A. 是偶函数 B. 是奇函数

C. 是偶函数 D.

[解析]由题意知函数的定义域为，因为是偶函数，所以，从而.

因为是偶函数，所以，从而，所以，即，所以是以4为周期的周期函数.

因为，所以，即，所以是偶函数.故选.

##### 求解析式变为求值设问变式

2. 已知函数的图象关于原点对称，且周期为4，，求的值.

[解析]由题意得.

### 培优点三 函数的奇偶性与对称性结合

#### 审题指导

典例3 （审题①推出函数图象的对称中心），（审题②由图象对称推出图象的对称中心），则（审题③由中心对称得出函数值）2.

**解题观摩**

[解析]因为函数是上的奇函数，所以，

，…………审题①

因为函数的图象与函数的图象关于直线对称，

，…………审题②

所以………….审题③

#### 通性通法

解决函数的奇偶性与图象的对称性的综合问题时，要注意把已知函数的奇偶性按定义转化，再判断函数图象的对称轴或对称中心；也可以利用图象的变换关系得出函数图象的对称性.总之，要充分利用已知条件进行适当转化.

#### 培优训练

##### 中心对称变为轴对称条件变式

已知函数是定义在上的奇函数，函数的图象关于直线对称，若，则.

[解析]因为的图象关于直线对称，所以是偶函数，

因为是偶函数，所以是偶函数，即,.又因为是奇函数，所以，所以.

### 培优点四 函数的单调性与对称性结合

#### 审题指导

典例4 已知定义在上的（审题①由奇函数的性质推出图象的对称中心），且对任意两个不相等的实数,，都有（审题②推出函数的单调性），则不等式（审题③利用对称性得到）的解集为.

**解题观摩**

[解析]将函数的图象先向右平移1个单位长度，再向上平移2个单位长度，可得的图象，因为函数是奇函数，其图象关于原点对称，

，…………审题①

，…………审题③

又因为对任意两个不相等的实数,，都有，

…………，审题②

由不等式，即，即，可得，解得，即不等式的解集为.

#### 通性通法

函数的单调性与对称性相结合的题目主要是利用对称性判断函数在区间上的单调性，在轴对称函数中，函数在关于对称轴对称的两个单调区间上的单调性相反；在中心对称函数中，函数在关于对称中心对称的两个单调区间上的单调性相同.

#### 培优训练

##### 解集问题变为比大小问题设问变式

已知定义在上的奇函数的图象关于直线对称，且在上单调递增.若，，，则，，的大小关系为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由函数的图象关于直线对称可得，结合奇函数的性质可知，，.由奇函数的性质结合在上单调递增，可得在上单调递增，所以，所以.故选.

### 培优点五 函数的奇偶性、对称性与周期性结合

#### 审题指导

典例5 已知定义在上的函数满足（审题①得到对称轴方程），且函数（审题②得到对称中心）.若，则（审题③由对称轴和对称中心得到周期求解）.

**解题观摩**

[解析]因为，，…………审题①

又函数是奇函数，，…………审题②

…………，审题③

，…………审题③

所以.

#### 通性通法

解决此类问题的难点在于推出函数的周期性，对于函数的奇偶性、对称性和周期性，这三者知二便可求一.（详情可参考基础课08的知识拓展）

#### 培优训练

##### 由单函数变为双函数综合变式

1. [2022·全国乙卷]已知函数,的定义域均为,且,.若的图象关于直线对称，，则( D ).

A. B. C. D.

[解析]因为的图象关于直线对称，所以.

因为，所以，即.

因为，所以，代入得，即，所以，.

因为，，所以，即，

所以.

因为，所以，

又因为，所以，所以的图象关于点中心对称，因为函数的定义域为，所以.

因为，所以，

故.故选.

##### 函数性质与函数图象结合的综合问题综合变式

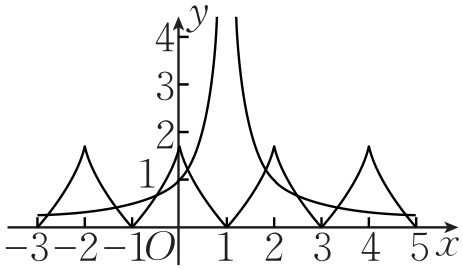
2. 已知定义域为的偶函数满足，当时，，则方程在区间上所有解的和为8.

[解析]因为函数满足，所以函数的图象关于直线对称，

又函数为偶函数，所以，

所以函数是周期为2的函数，

又设，则的图象也关于直线对称，作出函数与在上的大致图象，如图所示,



由图可知，函数与的图象在上有8个交点，且关于直线对称，

所以方程在上所有解的和为.